Séries de Vecteurs - Exponentielle de Matrices

Aubin SIONVILLE

MPI Clemenceau - 2021-2023

Rappel : Suites de vecteurs

$$\left.\begin{array}{r} \text{La transposée } A \mapsto A^T \\ \text{Un changement de base } A \mapsto P^{-1}AP \\ \text{La multiplication de deux matrices } (A,B) \mapsto AB \end{array}\right\} \text{ sont des applications linéaires continues}$$

Séries de vecteurs

Soit (u_n) une suite de vecteurs d'un espace vectoriel normé

Convergence

La séries de vecteurs $\sum u_n$ converge si

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ converge}$$

Convergence absolue

La valeur aboslue devient la norme des vecteurs

La séries de vecteurs $\sum u_n$ converge absolument si $\sum ||u_n||$ converge

Convergences

En dimension finie, convergence absolue $\implies$ convergence

Série entière de matrices

Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

et $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de cv R,

Si $||A|| < R,$ alors $\sum a_n A^n$ converge

Série géométrique de matrices

Soit $||\cdot||$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K}), A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$

Si $I_n - A$ et inversible, alors $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$

Si A est nilpotente d'ordre $\nu,$ alors $(I_n - A)$ est inversible et $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\nu-1} A^k$